SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC: 2024-2025
MÔN: TOÁN CHUYÊN
Ngày thi: 08/06/2024
Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Bài 1. **(6,0 điểm)**

a) Giải phương trình $x^4-6x^2-20x-24=0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-(y+2)x^2+y-2=0 \\ (2-x)(3y-4x+4)=2(2y+1)\sqrt{2y+1}. \end{cases}$

Bài 2. **(3,0 điểm)**

a) Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $xy-yz-zx=3$.

Chứng minh $A=(x^2-2xz-3)(y^2-2yz-3)(-z^2-3)$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^3+73xy+2025=3y^3$.

Bài 3. **(2,0 điểm)** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 8 thỏa mãn $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{a+c-b}+\dfrac{1}{b+c-a}=\dfrac{5}{4}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)}+\dfrac{(4-b)^2}{(4-c)(4-a)}+\dfrac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)}$.

Bài 4. **(7,0 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC có $AB<BC<CA$, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm G, tia GE cắt đường tròn (O) tại điểm I (G khác A và I khác G). Gọi J là giao điểm của BI và EF, K là giao điểm của OA và EF.

a) Chứng minh $HF.CE\cdot .BC=HC.BF.EF$.

b) Chứng minh $JE=JF$ và $HJ\,//\,DK$.

c) Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF, Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh $NJ\perp EF$.

Bài 5. **(2,0 điểm)** Cho lục giác đều có cạnh bằng 6 cm. Hỏi có thể đặt vào trong lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2 cm, sao cho bất kì hai hình tròn nào trong 7 hình tròn đó không có điểm trong chung?

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC: 2024-2025
MÔN: TOÁN CHUYÊN
Ngày thi: 08/06/2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. **(6,0 điểm)**

a) Giải phương trình $x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 = 0 \\ (2-x)(3y-4x+4) = 2(2y+1)\sqrt{2y+1}. \end{cases}$

Lời giải

a) Giải phương trình $x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0$.

$x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2x^3 - 4x^2 - 12x + 4x^2 - 8x - 24 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 2x - 6) + 2x(x^2 - 2x - 6) + 4(x^2 - 2x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 6)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 6 = 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1 - \sqrt{7}; 1 + \sqrt{7}\}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 = 0 & (1) \\ (2-x)(3y-4x+4) = 2(2y+1)\sqrt{2y+1} & (2) \end{cases}$

Điều kiện $y \ge -\dfrac{1}{2}$.

PT (1) $\Leftrightarrow y^2 + y - 2 - (y+2)x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (y+2)(y-1) - (y+2)x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (y+2)(y - 1 - x^2) = 0$

TH1: $y = -2$ (không thỏa mãn $y \ge -\dfrac{1}{2}$).

TH2: $x^2 = y - 1 \Rightarrow 2x^2 + 3 = 2y + 1$ và $3y = 3x^2 + 3$.

Thay vào phương trình (2), ta được:

$(2-x)(3x^2+3-4x+4)=2(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}$

$\Leftrightarrow (2-x)(2x^2+3+x^2-4x+4)=2(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}$

$\Leftrightarrow 2(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}=(2-x)\left[2x^2+3+(x-2)^2\right]$ (*)

Đặt $\begin{cases}\sqrt{2x^2+3}=a\\ 2-x=b\end{cases}\left(a\ge\sqrt{3}\right)$. Khi đó phương trình trở thành:

$2a^3+b(a^2+b^2)=0 \Leftrightarrow a^3+a^2b+a^3+b^3=0$

$\Leftrightarrow a^2(a+b)+(a+b)(a^2-ab+b^2)=0$

$\Leftrightarrow (a+b)(2a^2-ab+b^2)=0$.

Vì $b^2-ab+2a^2=\left(b-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{7}{4}a^2>0$ (vì $a\ge\sqrt{3}$)

nên $a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow \sqrt{2x^2+3}=2-x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+3=4-4x+x^2\\ x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x-1=0\\ x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{5}\Rightarrow y=10-4\sqrt{5}\\ x=-2-\sqrt{5}\Rightarrow y=10+4\sqrt{5}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $(x,y)=\left(-2+\sqrt{5};10-4\sqrt{5}\right),\left(-2-\sqrt{5};10+4\sqrt{5}\right)$.

CÁCH 2: $\begin{cases}y^2-(y+2)x^2+y-2=0 & (1)\\ (2-x)(3y-4x+4)=2(2y+1)\sqrt{2y+1} & (2)\end{cases}$

Điều kiện $y\ge -\frac{1}{2}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow$ $y^2-(y+2)x^2+y-2=0 \Leftrightarrow (y+2)(y-x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-2\\ y=x^2+1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow y=x^2+1$ (vì $y\ge -\frac{1}{2}$).

Thay $y=x^2+1$ vào phương trình (2) ta được

$(2-x)(3x^2-4x+7)=2(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}$ (*)

Do $2(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}>0 \Rightarrow (2-x)(3x^2-4x+7)>0 \Leftrightarrow 2-x>0 \Leftrightarrow x<2$ (vì $3x^2-4x+7>0$ với mọi x).

Phương trình (*) $\Leftrightarrow -3x^3+10x^2-15x+14+2(2x^2+3)(x-2)=2(2x^2+3)\left(\sqrt{2x^2+3}+x-2\right)$

$\Leftrightarrow x^3+2x^2-9x+2=2(2x^2+3)\left(\sqrt{2x^2+3}+x-2\right)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+4x-1) = 2(2x^2+3)\dfrac{x^2+4x-1}{\sqrt{2x^2+3}-x+2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-1=0 \\ x-2 = \dfrac{4x^2+6}{\sqrt{2x^2+3}-x+2} \end{array}\right.$.

Xét $x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+\sqrt{5} \\ x=-2-\sqrt{5} \end{array}\right.$

Xét $x-2 = \dfrac{4x^2+6}{\sqrt{2x^2+3}-x+2}$ (vô nghiệm vì với $x<2$ thì

$VT = x-2 < 0 < \dfrac{4x^2+6}{\sqrt{2x^2+3}-x+2} = Vp$)

Bài 2. **(3,0 điểm)**

a) Cho $x,\ y,\ z$ là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $xy-yz-zx=3$.

Chứng minh $A=(x^2-2xz-3)(y^2-2yz-3)(-z^2-3)$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^3+73xy+2025=3y^3$.

Lời giải

a) Cho $x,\ y,\ z$ là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $xy-yz-zx=3$.

Chứng minh $A=(x^2-2xz-3)(y^2-2yz-3)(-z^2-3)$ là một số chính phương.

$x^2-2xz-3 = x^2-2xz-xy+yz+zx = x^2-xz-xy+yz = (x-z)(x-y)$

Tương tự: $y^2-2yz-3=(y-z)(y-x)$

$-z^2-3 = -z^2-xy+yz+zx = (x-z)(z-y)$

Suy ra $A=(x^2-2xz-3)(y^2-2yz-3)(-z^2-3) = \left[(x-y)(x-z)(y-z)\right]^2$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^3+73xy+2025=3y^3$.

Ta có: $3x^3+73xy+2025=3y^3 \Leftrightarrow 3(x^3-y^3)+73xy+2025=0$

$\Leftrightarrow 3(x-y)\left[(x-y)^2+3xy\right]+73xy+2025=0$. (1)

Đặt $\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases}$. Khi đó phương trình (1) trở thành:

$3a(a^2+3b)+73b+2025=0 \Leftrightarrow b(9a+73)=-3a^3-2025$.

TH1: $9a+73=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{-73}{9}$ (loại)

TH2: $9a+73\neq 0 \Leftrightarrow b=\dfrac{-3a^3-2025}{9a+73} \Leftrightarrow -243b=\dfrac{729a^3+492\,075}{9a+73}$

$\Leftrightarrow -243b=81a^2-657a+5329+\dfrac{103\,058}{9a+73}$.

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow -243b\in\mathbb{Z}$.

Do đó $9a+73\in Ư\left(103\,058\right)=\left\{\pm1;\pm2;\pm227;\pm454;\pm51529;\pm103\,058\right\}$.

Giải ta được $(a,b)=(-8;-489),(-103\,058;-11\,459)$

+) Với $\begin{cases}a=-8\\b=-489\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=8\\xy=-489\end{cases}\Rightarrow(y+8)y=-489\Leftrightarrow y^2+8y+489=0$ (vô nghiệm).

+) Với $\begin{cases}a=-103\,058\\b=-11\,459\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=-103\,058\\xy=-11\,459\end{cases}\Rightarrow(y-103\,058)y=-11\,459$

$\Leftrightarrow y^2-103\,058y+11\,459=0$ (không có nghiệm nguyên).

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 3. **(2,0 điểm)** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 8 thỏa mãn $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{a+c-b}+\dfrac{1}{b+c-a}=\dfrac{5}{4}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)}+\dfrac{(4-b)^2}{(4-c)(4-a)}+\dfrac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}a+b-c=2x\\a+c-b=2y\\b+c-a=2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=2(x+y+t)=8\\c=y+t\\b=x+t\\a=x+y\end{cases}\Rightarrow x+y+z=4$

Ta có: $4-a=x+y+t-(x+y)=z;\ 4-b=y;\ 4-c=x$

Bài toán đưa về thành: Cho $x,\ y,\ z>0$ thỏa mãn $\begin{cases}x+y+z=4\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow 2(xy+yz+zx)=5xyz\,(1)$

Không mất tính tổng quát, giả sử $z=\min\{x,y,z\}\Rightarrow\dfrac{2}{5}\le z\le\dfrac{4}{3}$

Tìm min $P=\dfrac{z^2}{xy}+\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{xz}$

Ta có: $P=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\dfrac{(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+tx)+3xyz}{xyz}$

$$=\frac{64-6.2(xy+yz+zx)+3xyz}{xyz}=\frac{64}{xyz}-27$$

Từ (1) $\Rightarrow xy(5z-2)=2z(x+y)$

$\Leftrightarrow xyz(5z-2)=2z^2(4-z)$

$\Rightarrow xyz=\dfrac{2z^2(4-z)}{5z-2}$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{2z^2(4-z)}{5z-2}\ge 2 \Leftrightarrow 8z^2-2z^3\ge 10z-4$

$2z^3-8z^2+10z-4\le 0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2(z-2)\le 0$ (luôn đúng)

$P\le\dfrac{64}{2}-27=5$ đạt được khi

$$\begin{cases} z=1\\ x+y=3\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1\\ y=2\\ z=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases} x=2\\ y=1\\ z=1\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases} a=b=3\\ c=2\end{cases}$ và các hoán vị.

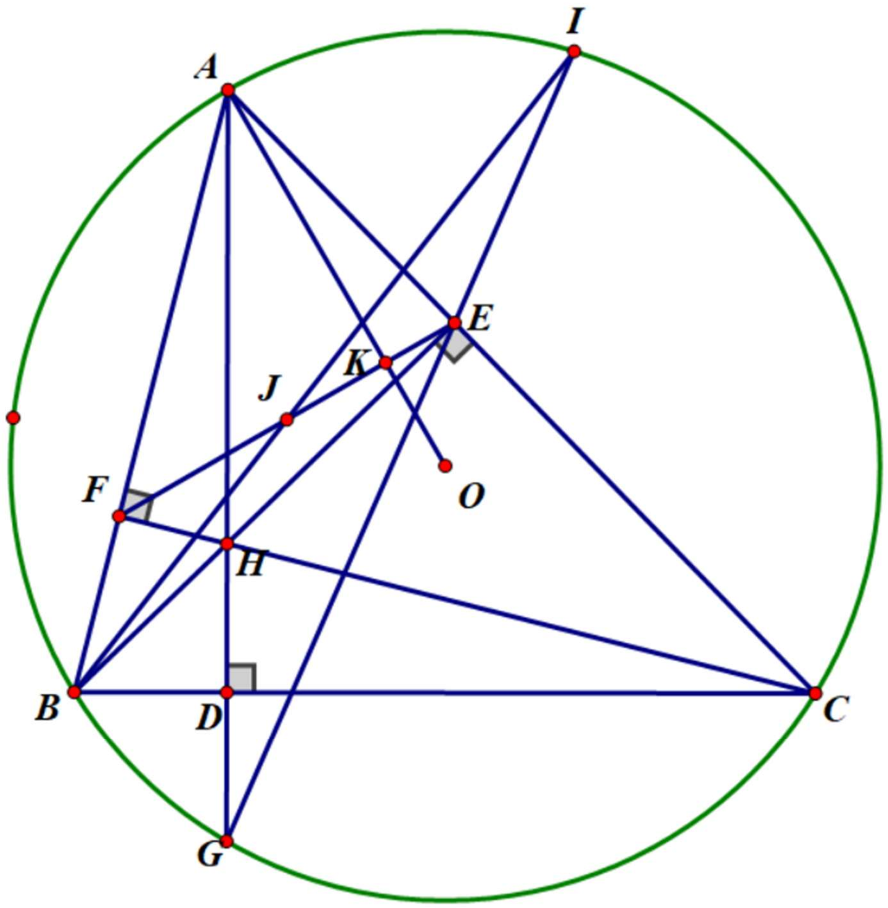
Bài 4. **(7,0 điểm)** Cho tam giác nhọn ABC có $AB<BC<CA$, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm G, tia GE cắt đường tròn (O) tại điểm I (G khác A và I khác G). Gọi J là giao điểm của BI và EF, K là giao điểm của OA và EF.

a) Chứng minh $HF.CE\cdot.BC=HC.BF.EF$.

b) Chứng minh $JE=JF$ và $HJ // DK$.

c) Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF, Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh $NJ\perp EF$.

Lời giải



a) Chứng minh $HF.CE \cdot .BC = HC.BF.EF$.

Vì $\Delta HBC \backsim \Delta HFE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{HB}{HF}$

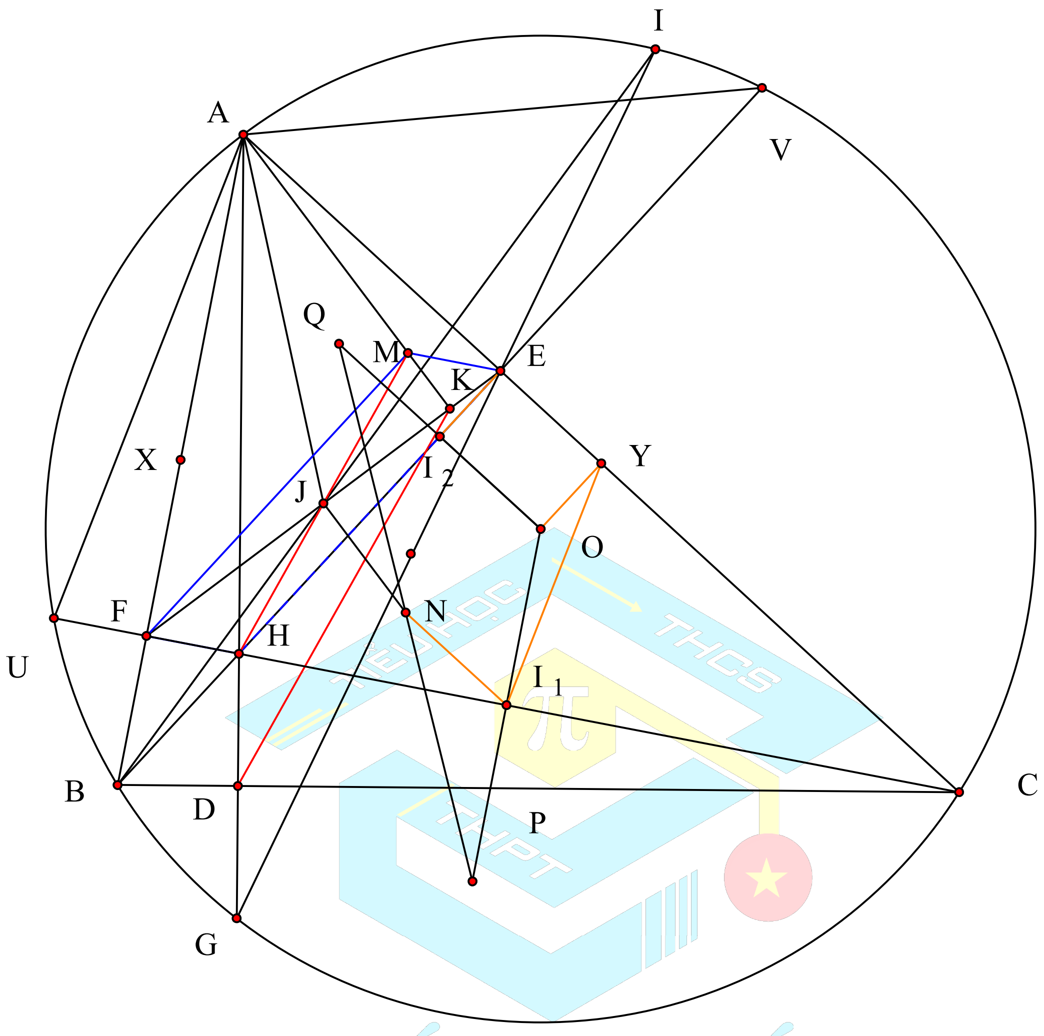
Mặt khác $\Delta CEH \backsim \Delta BFH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CE}{BF} = \dfrac{HC}{HB}$

Từ đó ta có: $\dfrac{HF}{HC} \cdot \dfrac{CE}{BF} \cdot \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{HF}{HC} \cdot \dfrac{HC}{HB} \cdot \dfrac{HB}{HF} = 1$

$\Rightarrow HF \cdot CE \cdot BC = HC \cdot BF \cdot EF$

b) Chứng minh $JE = JF$ và $HJ \,//\, DK$.

Vì $\Delta EFB \backsim \Delta EHD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EF}{EH} = \dfrac{FB}{HD} \Rightarrow \dfrac{EF}{2EH} = \dfrac{FB}{2HD} = \dfrac{FB}{HG}$ (1)



Mặt khác $\Delta FBJ \backsim \Delta HGE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FB}{HG} = \dfrac{FJ}{EH}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{EF}{2EH} = \dfrac{FJ}{EH}$ hay $EF = 2FJ$

Hay $JE = JF$

Gọi M là trực tâm của ΔAEF. Khi đó $HEMF$ là hình bình hành

Có J là trung điểm của EF nên J là trung điểm của HM

Mặt khác do $\Delta AKE \backsim \Delta ADB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AE}{AB}$ (3)

Ta cũng có: $\widehat{ABH} = \widehat{AEM}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) nên $\Delta ABH \backsim \Delta AEM \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AM}{AH}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{AM}{AH}$ hay $\dfrac{AM}{AK} = \dfrac{AH}{AD}$

$\Rightarrow HM \parallel DK$

Mà H, M, J thẳng hàng nên $HJ \parallel DK$

c) Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF, Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh $NJ \perp EF$.

Gọi X, Y lần lượt là trung điểm AB, AC.

Gọi giao điểm của CF, BE với đường tròn (O) lần lượt là U, V.

Ta dễ thấy $AU = AV$.

Gọi giao điểm của OP và CF là I_1, giao điểm của OQ và BE là I_2.

Ta có OI_2EY là hình chữ nhật

$\Rightarrow EY = OI_2$ nên $EY = NI_1$.

$\Rightarrow EYI_1N$ là hình bình hành

$\Rightarrow NE = YI_1 = \dfrac{AU}{2}$

Tương tự $NF = \dfrac{AV}{2}$

$\Rightarrow NE = NF$.

Suy ra điều phải chứng minh.

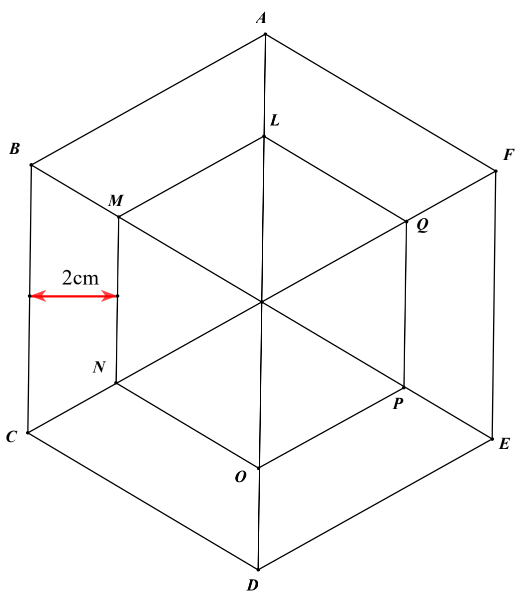
Bài 5. **(2,0 điểm)** Cho lục giác đều có cạnh bằng 6 cm. Hỏi có thể đặt vào trong lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2 cm, sao cho bất kì hai hình tròn nào trong 7 hình tròn đó không có điểm trong chung?

Lời giải

Xét lục giác đều $ABCDEF$ có cạnh bằng $6cm$.

Giả sử có thể có một cách sắp xếp 7 hình tròn thỏa mãn yêu cầu (1).

Dựng hình lục giác đều $LMNOPQ$ sao cho mỗi cạnh của hình lục giác này cách cạnh tương ứng của hình lục giác lớn $2cm$.



Dễ thấy tâm của 7 hình tròn này phải nằm trên lục giác đều $LMNOPQ$.

Dễ tính được lục giác đều này có cạnh: $\dfrac{3\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}\cdot 6\approx 3,7\,\text{cm}$

Chia hình lục giác đều này thành 6 tam giác đều.

Theo nguyên lý Dirichlet có một tam giác đều chứa ít nhất hai tâm, khi đó khoảng cách giữa hai tâm này lớn hơn 4 cm, do đó lớn hơn cạnh của tam giác đều đó (vô lý).

Từ đó suy ra giả sử (1) là không đúng.

Vậy không thể có một cách sắp xếp 7 hình tròn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HẾT

LỜI GIẢI ĐƯỢC THỰC HIỆN BỞI

Tập Thể Giáo Viên Nhóm Toán "Tiểu Học – THCS – THPT VIỆT NAM"

Tạ Thị Huyền Trang	Phạm Thụ	Việt Dũng
Lê Hường	Le Hoop	Trần Lệnh Ánh
Trần Hùng Quân	Ngonguyen Quocman	Lê Minh Đức
Phạm Thu Hà	Bùi Cảm	Nguyễn Minh Toàn
Nguyễn Trí Chính	Bùi Quốc Trọng	Linh Sơri

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2024 – 2025
KHÓA NGÀY 06, 07 THÁNG 6 NĂM 2024
Môn thi chuyên: Toán
Ngày thi: 07 tháng 6 năm 2024
Thời gian làm bài: 150 phút *(Không tính thời gian phát đề)*

Bài 1. (1,5 điểm)

Cho tập nghiệm của phương trình $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)(x^2+ex+f)=0$ là $\{1;2;3;4;5;6\}$.

Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+c^2+e^2-2(b+d+f)$.

Bài 2. (2,0 điểm) Giải các phương trình sau

a) $\left(\sqrt{x+5}\right)^3=6x+5$

b) $\sqrt[3]{3x+6}+\sqrt{23-x}=7$

Bài 3. (1,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H và M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường trung trực của BC tại O.

a) Chứng minh $AH=2OM$.

b) Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 4. (1,5 điểm)

Với các số thực dương a,b thỏa mãn $a^2+b^2\le 2$.

a) Chứng minh $a+b\le 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+b^2}+\dfrac{2024}{a+b+2}$.

Bài 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm bất kì trên cung nhỏ BC của (O) $(BE<BA)$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $BK=BE$, $CL=CE$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm BC và KL.

a) Chứng minh $\widehat{BNC}=90^\circ$.

b) Gọi F là điểm thuộc (O) sao cho EF song song với BC. Chứng minh MN song song với AF.

Bài 6. (1,5 điểm)

a) Cho một hình vuông cạnh $8\,cm$ có chứa bên trong 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể vẽ được một đường tròn bán kính $1,5\,cm$ có chứa bên trong ít nhất 127 điểm trên.

b) Cặp số nguyên dương $(a;b)$ được gọi là cặp số "may mắn" của số n, nếu $a+b=n$ và tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{p}$. Tìm tất cả các cặp số "may mắn" của số 2025.

HẾT

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.